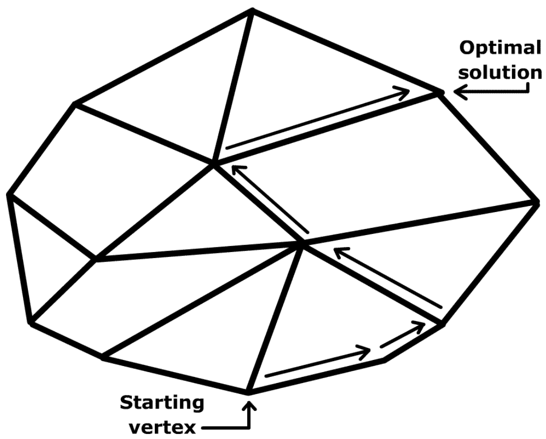
Algoritmo símplex

En optimización matemática, el término **algoritmo símplex** habitualmente se refiere a un conjunto de métodos muy usados para resolver problemas de programación lineal, en los cuales se busca el máximo de una función lineal sobre un conjunto de variables que satisfaga un conjunto de inecuaciones lineales. El *algoritmo simplex primal* fue desarrollado por el matemático norteamericano George Dantzig en 1947, y procede examinando vértices adyacentes del poliedro de soluciones. Un algoritmo simplex es un algoritmo de pivote.



Un sistema de desigualdades lineales define un poliedro como una región factible. El algoritmo simplex comienza en un vértice y se mueve a lo largo de las aristas del poliedro hasta que alcanza el vértice de la solución óptima.

Un método llamado de manera similar, pero no relacionado al anterior, es el método Nelder-Mead (1965) o método de descenso (o ascenso) símplex; un método numérico que busca un mínimo (o máximo) local de una función cualquiera examinando en cada paso los vértices de un simplex.

Entrada del problema

Considerar un problema de programación lineal,

maximizar $z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$

sujeto a $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \, \mathbf{x} \geq 0$

El algoritmo símplex requiere que el problema de programación lineal esté en la forma aumentada de la programación lineal. El problema puede ser escrito como sigue, en forma de matriz:

Maximizar z en:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{c}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}, \, \mathbf{x}_s \geq 0$$

donde **x** son las variables desde la *forma estándar*, $\mathbf{x}_s$ son las variables de holgura introducidas en el proceso de aumentación, **c** contiene los coeficientes de optimización, describe el sistema de ecuaciones contraídas, y *Z* es la variable a ser maximizada.

El sistema es típicamente *no determinado*, desde que el número de variables excede el número de ecuaciones. La diferencia entre el número de variables y el número de ecuaciones nos da los *grados de libertad* asociados con el problema. Cualquier solución, óptima o no, incluirá un número de variables de valor arbitrario. El algoritmo símplex usa cero como valor arbitrario, y el número de variables con valor cero es igual a los grados de libertad.

Valores diferentes de cero son llamados *variables básicas*, y valores de cero son llamadas *variables no básicas* en el algoritmo símplex.

Esta forma simplifica encontrar la *solución factible básica* inicial, dado que todas las variables de la *forma estándar* pueden ser elegidas para ser no básicas (cero), mientras que todas las nuevas variables introducidas en la *forma aumentada*, son básicas (diferentes de cero), dado que su valor puede ser calculado trivialmente ($\mathbf{x}_{s\,i} = \mathbf{b}_j$ para ellas, dado que la matriz problema aumentada en diagonal es su lado derecho)

En cada una de las desigualdades que se plantean en el modelo matemático de programación lineal, se plantean desigualdades de <, >, <=, >=, o =; estas desigualdades se convierten en igualdades completando con variables de holgura si se trata de menor o igual que, o menor que; en el caso de que sea mayor o igual que o mayor que, se completa con variables de excedente, estas con signo negativo ya que como su nombre lo indica, es una cantidad que esta de excedente y hay que quitar para convertirla en igualdad; en caso se maneje el =, se manejan las variables artificiales.

Pasos del Método Simplex

Este proceso que se repite una y otra vez, siempre inicia en un punto extremo de la región factible que normalmente es el origen, en cada iteración se mueve a otro punto extremo adyacente hasta llegar a la solución óptima.

Los pasos del Método Simplex son los siguientes:

1. Utilizando la forma estándar, determinar una solución básica factible inicial igualando a las n-m variables igual a cero (el origen).
2. Seleccionar la variable de entrada de las variables no básicas que al incrementar su valor pueda mejorar el valor en la función objetivo. Cuando no exista esta situación, la solución actual es la óptima; si no, ir al siguiente paso.
3. Seleccionar la variable de salida de las variables básicas actuales.
4. Determinar la nueva solución al hacer la variable de entrada básica y la variable de salida no básica, ir al paso 2 (actualizar).

Conceptos básicos

Forma estándar

Es la igualación de las restricciones del modelo planteado, así como el aumento de variables de holgura, o bien la resta de variables de exceso.

Ejemplo:

Modelo original	**Forma estándar**
F.O.: Max $z = 60x1 + 30x2 + 20x3$ Sujeta a: $8x1 + 6x2 + x3 \leq 48$ $4x1 + 2x2 + 1.5x3 \leq 20$ $2x1 + 1.5x2 + 0.5x3 \leq 8$ $x2 \leq 5$ $xj \geq 0$ j= 1,2,3	F.O.: Max $z = 60x1 + 30x2 + 20x3$ Sujeta a: $8x1 + 6x2 + x3 + x4 = 48$ $4x1 + 2x2 + 1.5x3 + x5 = 20$ $2x1 + 1.5x2 + 0.5x3 + x6 = 8$ $x2 + x7 = 5$ $xj \geq 0$ j= 1,2,3,4,5,6,7

Forma canónica

En el método Simplex es de bastante utilidad la forma canónica, especialmente para explorar la relación de dualidad.

Un problema de Programación Lineal se encuentra en la forma canónica si se cumplen las siguientes condiciones:

Para el caso de la forma canónica de maximización:

- La función objetivo debe ser de maximización.
- Las restricciones son del tipo ≤.
- Las variables de decisión son mayores o iguales a cero.

Para el caso de la forma canónica de la dieta:

- La función objetivo es minimizada.
- Las restricciones son de tipo ≥.
- Las variables de decisión son mayores o iguales a cero.

Ejemplo:

Forma canónica de maximización:	**Forma canónica de dieta:**
Maximizar z=2x1 + 3x2 + 5x3 Sujeto a: 2x1 + 3x2 + 8x3 ≤ 8 5x1 + 2x2 + 4x3 ≤ 9 x1,x2 ≥ 0	Minimizar z= -x1 - 3x2 Sujeto a: x1 – x2 ≥ 6 -x1 + 2x2 ≥ 8 x1,x2 ≥ 0

Variable de holgura

Se usa para convertir en igualdad una desigualdad de tipo "≤". La igualdad se obtiene al adicionar en el lado izquierdo de la desigualdad una variable no negativa, que representa el valor que le hace falta al lado izquierdo para ser igual al lado derecho. Esta se conoce como variable de holgura, y en el caso particular en el que las restricciones de tipo ≤ se refieren al consumo máximo de un recurso, la variable adicionada cuantifica la cantidad sobrante de recurso (cantidad no utilizada) al poner en ejecución la solución óptima.

Considerando el problema de programación lineal:

Minimiza la siguiente función

$$Z = -2x - 3y - 4z$$

Sujeta a

$$3x + 2y + z \leq 10$$
$$2x + 5y + 3z \leq 15$$
$$x,\ y,\ z \geq 0$$

Se añaden las variables de holgura *s* y *t*, que se representan en la tabla canónica

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 15 \end{bmatrix}$$

donde las columnas 5 y 6 representan las variables básicas *s* y *t* y la correspondiente solución básica posible es

$$x = y = z = 0,\ s = 10,\ t = 15.$$

Las columnas 2, 3 y 4 pueden ser seleccionadas como columnas pivotes, para este ejemplo se seleccionó la columna 4. Los valores de *x* resultantes de la elección de las filas 2 y 3 como filas pivotes son 10/1 = 10 y 15/3 = 5 respectivamente. De estos el mínimo es 5, por lo que la fila 3 sería la fila pivote. Operando los pivotes se produce

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -20 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 5 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 5 \end{bmatrix}$$

Ahora columnas 4 y 5 representan las variables básicas *z* y *s* y la solución óptima correspondiente es

$$x = y = t = 0,\ z = 5,\ s = 5.$$

Para el paso siguiente, no hay entradas positivas en la fila objetivo y de hecho

$$Z = -20 + \tfrac{2}{3}x + \tfrac{11}{3}y + \tfrac{4}{3}t$$

por lo que el valor mínimo de *Z* es −20.

Variable de exceso

Se usa para convertir en igualdad una desigualdad del tipo "≥" Se realiza al restar en el lado izquierdo de la desigualdad, una variable no negativa, que representa el valor en el cual el valor del lado izquierdo excede al derecho. A esta variable la llamaremos variable de exceso y en el caso particular en el que las restricciones de tipo ≥ se refieran al contenido mínimo de un ingrediente en una mezcla, la variable adicionada indica cuánto ingrediente en exceso sobre el mínimo exigido contendrá la mezcla.

Ejemplo

Min z = 3X1 + 6X2 – X3

s.a

X1 + 6X2 – X3 >= 12

2X1 + X2 – 7X3 >= 18

X1 + X2 – X3 >= 7

Xi >= 0 i=1-3

Min z = 3X1 + 6X2 – X3

s.a

X1 + 6X2 – X3 – X4 = 12

2X1 + X2 –7 X3 – X5 = 18

X1 + X2 – X3 – X6 = 7

Xi >= 0 i=1-6

Variables de exceso: X4, X5 y X6.

Solución básica:

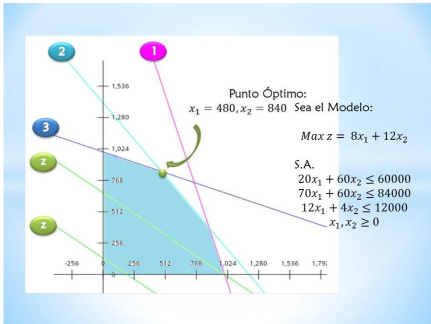
Si hay n variables y m restricciones, una solución es básica si n-m variables valen cero. Gráficamente, cualquier punto de intersección es una solución básica.

Solución óptima

Siempre está asociada a un punto extremo de la región factible y satisface todas las restricciones si se evalúa en ellas así como es el punto que en el caso de maximización hace que el valor de z sea el máximo (más grande) y el el caso de minimización sea el mínimo (más pequeño).

Variables básicas y no básicas

Se denominan variables básicas a las variables del vector xB formado por las m variables asociadas con la solución básica y variables no básicas a las n-m restantes variables que se han igualado a cero.



Ejemplo gráfico de la solución óptima

Ejemplo

Forma estándar del modelo

Max z = 3X1 + 2X2

s.a

X1 + 2X2 + X3 = 6

2X1 + X2 + X4 = 8

-X1 + X2 + X5 = 1

```
X2 + X6= 2
```

X1, X2 >=0

Solución de la primera iteración

X1=0, X2=0, X3=6, X4=8, X5=1, X6=2

Variables básicas: X3, X4, X5, X6

Variables no básicas: X1, X2

Solución óptima múltiple

Existen problemas lineales que no tienen una solución óptima única, sino que al contrario, tienen un número infinito de soluciones.Para detectar una solución múltiple en la tabla óptima, se deberá tener al menos una variable con su Zj-Cj=0 no básica. Ejemplo: Modelo estándar Max z=3x1+2x2

```
        x1+x3=4
       2x2+x4=12
      3x1+2x2+x5=18
      x1,x2,x3,x4,x5>=0
```

	X1	X2	X3	X4	X5	SOL
Zj-Cj	0	0	0	0	1	18
X1	1	0	1	0	0	4
X4	0	0	3	1	-1	6
X2	0	1	-3/2	0	1/2	3

Solución x1=4 x2=3 x4=6 x3=x5=0 z=18

X3=0 es variable no básica por lo tanto se tiene una solución múltiple y para obtener alguna otra solución se deberá iterar tomando como variable de entrada en Zj-Cj=0

Variable degenerada

Una variable degenerada es una variable básica que vale 0. Gráficamente esto puede ocurrir cuando más de dos rectas se intersequen en el mismo punto.

Base

Conjunto de variables básicas. En el ejemplo anterior, la base es {X3, X4, X5, X6}

Variable no restringida

Es aquella que puede tomar toda clase de valores positivos, cero y negativos puede escribirse como la diferencia de dos variables no-negativas.

Ejemplo:

Sea x1 una variable no restringida, entonces:

x1=x2-x3

donde x2>=0, Nótese que si x2>x3, eso implica que x1>0: si x2=x3, entonces x1=0: si x2<x3, se tiene que x1<0.

Función objetivo:

Define la efectividad del modelo como función de las variables de decisión. Ejemplo: *Max z= 5x1+2x2*

Variables de entrada

Estas suelen encontrarse en un criterio que se conoce como “Condición de optimalidad”, en un modelo, ya sea de optimización o minimización, y se refiere a la variable no básica en el renglón “z” con el coeficiente más negativo, si se trata de una maximización, o el coeficiente mas positivo, si se trata de una minimización, la cual, en el la tabla de solución anterior, a excepción de la primer tabla, esta variable era una variable básica.

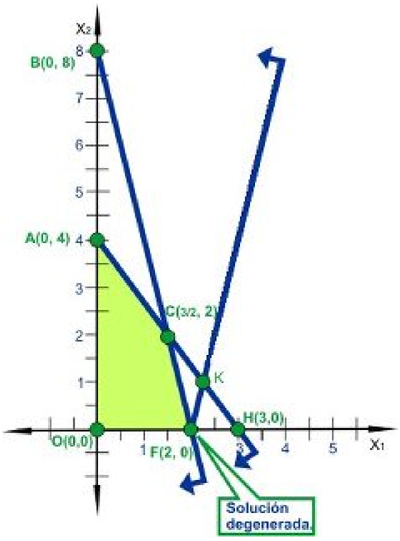
'Variables de salida

Esta variable es un punto extremo que se encuentra en un criterio conocido como “Condición de factibilidad”, en un modelo, ya sea de optimización o minimización, y se refiere a la variable básica asociada con la mínima razón no negativa con el coeficiente más negativo, si se trata de una maximización, o el coeficiente mas positivo, si se trata de una minimización, la cual, en el la tabla de solución siguiente, pasará a ser variable no básica.

	Variables básicas	Variables no básicas	Variable de entrada	Variable de salida
A	X3, X4, X5, X6	X1, X2	X1	X2
B	X3, X4, X5, X1	X6, X2	X2	X3
C	X2, X4, X5, X1	X6, X3	X6	X4
D	X2, X6, X5, X1	X4, X3	X3	X1
E	X2, X6, X5, X3	X4, X1	X4	X2

Solución degenerada

La degeneración ocurre cuando en alguna iteración del método simplex existe un empate en la selección de la variable que sale. Este empate se rompe arbitrariamente. En este caso decimos que la nueva solución es degenerada. Sin embargo, cuando suceda esto una o más veces de las variables básicas, será necesariamente igual a cero en la siguiente iteración. En el método simplex, la presencia de una variable básica igual a cero, no requiere ninguna acción especial; en todo caso, es necesario no descuidar las condiciones de degeneración. En términos geométricos, la degeneración ocurre cuando un vértice está definido por demasiadas restricciones.



Variable artificial

Se usa una variable artificial cuando las restricciones son "=" y "≥" y sucede cuando el origen no se encuentra dentro de la región factible, tratando de llevar el modelo a otra "dimensión" en la cual el origen si exista en la región.

Ejemplo:

max z = 2x1 + x2

s. a.

10x1 + 10x2 <= 9

10x1 + 5x2 >=1

x1,x2>=0

Agregando variables artificiales:

max z = 2x1 + x2

s. a.

10x1 + 10x2 + x3 = 9

10x1 + 5x2 - x4 + a1 = 1

x1,x2,x3,x4>=0 a1>=0

Condición de optimalidad.

La variable de entrada en un problema de maximización es la variable que tiene el coeficiente mas negativo en el renglón Zj-Cj y para el caso de minimización la variable de entrada corresponde al coeficiente mas positivo del renglón Zj - Cj. La optimalidad se logra cuando en el renglón Zj-Cj ya no hay valores positivos (minimización) o negativos (maximización) según sea el caso.

Maximizar z = 3x1 + 2x2
S.a
2x1+x2≤18
2x1+3x2≤42
3x1+x2≤24
x,y ≥ 0

Tabla en modelo estándar.

	x1	x2	x3	x4	x5	Sol
Zj-Cj	-3	-2	0	0	0	0
x3	2	1	1	0	0	18
x4	2	3	0	1	0	42
x5	3	1	0	0	0	24

En la tabla óptima

	x1	x2	x3	x4	x5	Sol
Zj-Cj	0	0	1 ¼	¼	0	33
x2	0	1	- ½	½	0	12
x5	0	0	-1 ¾	¼	1	3
x1	1	0	¾	-¼	0	3

En el renglón Zj-Cj todos los valores son positivos por lo tanto llegamos a la optimalidad de la tabla.

Condición de factibilidad

La variable de salida tanto en minimización como en maximización se elige a la variable básica que tiene la razón no negativa mas pequeña.

Ejemplo de factibilidad en maximización.

Maximizar z = 3x1 + 2x2

S.a

2x1+x2≤18

2x1+3x2≤42

3x1+x2≤24

x,y ≥ 0

Tabla en modelo estándar.

	x1	x2	x3	x4	x5	Sol
Zj-Cj	-3	-2	0	0	0	0
x3	2	1	1	0	0	18
x4	2	3	0	1	0	42
x5	3	1	0	0	0	24

El criterio de factibilidad se cumple ya que todos los bi (la columna solución) tienen valor no negativo por tanto es una solución factible.

Solución factible

Es aquel vector columna, XT=(X1,X2,…Xn) que satisface las restricciones: AX≤b X≥0

Ejemplo:

Maximizar Z = 3X1 + 5X2

Sujeto a

X1 ≤ 4

2X2 ≤ 12

3X1 + 2X2 ≤ 18

X1 , X2 ≥ 0

Solución Factible: X1=4, X2=3

Solución factible básica

Aquella solución factible con no más de m componentes positivas. La solución factible se encuentra en un punto extremo es decir en uno de los vértices de la región factible.

Ejemplo:

Maximizar Z = 3X1 + 5X2

Sujeto a

X1 ≤ 4

2X2 ≤ 12

3X1 + 2X2 ≤ 18

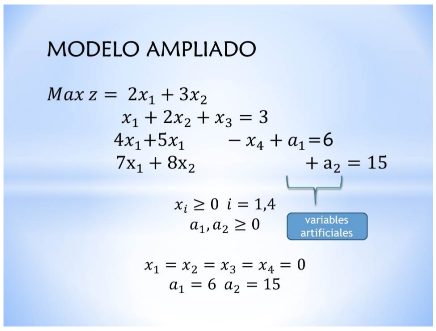
X1 , X2 ≥ 0

X1=0, X2=6; X1=0, X2=0; X1=4, X2=0; X1=4, X2=3; X1=2, X2=6 pueden ser soluciones factibles básicas.

Modelo Ampliado

Cuando se introduce en cada restricción una variable artificial que no contenga una variable de holgura.

Enlaces externos



Ejemplo de un Modelo de Maximización en su Forma Ampliada

- Actualización en Wikipedia del Método Simplex [1]Conceptos y ejemplo elaborado por alumnos de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación. FES Acatlán UNAM.
- A2 Actualización en Wikipedia del Método Simplex [2]Conceptos y ejemplo elaborado por alumnos de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación. FES Acatlán UNAM.
- Ejercicios resueltos utilizando el Método Simplex [3] Módulo de resolución para resolver modelos de Programación Lineal utilizando el Método Simplex
- Ejemplos clásicos resueltos por el Método Simplex [4].
- Ejemplo del método simplex [5]Conceptos y ejemplo elaborado por alumnos de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación. FES Acatlán UNAM.
- Conceptos y Ejemplo del Método Simplex aplicado a un problema de programación lineal. [6] Documento elaborado por estudiantes de la carrera de Matemáticas aplicadas y computación. FES Acatlán UNAM.
- Conceptos y ejemplo del Método Simplex [7]Conceptos y ejemplo elaborado por alumnos de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación. FES Acatlán UNAM.

Referencias

[1] https://docs.google.com/document/d/1JGyeBwXdpD_jQy3zLqoWzp9qJ3h8HdTUFIKJ5B-L2bk/edit
[2] https://docs.google.com/document/d/1UqVG6F64XDVT-nL6Rt70o15_AjWVRUtfs2wibsJv4Zo/edit
[3] http://www.programacionlineal.net/simplex.html
[4] http://www.phpsimplex.com/ejemplo_problemas.htm
[5] https://docs.google.com/document/pub?id=1rm1EM-mEAfy9b9azYlSWQGAWId0yIXFLJpk1_3VMbfQ
[6] https://docs.google.com/document/pub?id=109SQJEroTPH68GmbsxPHpReyBji5Fd3jgl-4D5xrN6Y
[7] https://docs.google.com/document/pub?id=1T6SpMssibts-RsGjmNQ4HSzxbxPA9N0-H6s7Z7cpgr0

Fuentes y contribuyentes del artículo

Algoritmo símplex *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=63678655 *Contribuyentes*: Ana Daleth, Anonymous, Axxgreazz, Diosa, Edgar Silva, Efrain arellanes, Egozcue, Ensada, Exterforce, Gama dlw, GermanX, Ggenellina, Gmagno, HanPritcher, Happygilly123, Heinrich Puschmann, Hispa, Humbefa, Ingenioso Hidalgo, Janis.lukas, Kat1308, Luisunam01, MaribelLoGo, Muro de Aguas, NACLE, Nataly Rivas, Oblongo, Paintman, Pedrojs, Petronas, Ralgis, Riviera, Rubenskazul, Sabbut, Secharte, Shakoran, Simeón el Loco, Tano4595, Technopat, Tessier, Will vm, Yleon, Yul.ivette, Yuraszeck, 45 ediciones anónimas

Fuentes de imagen, Licencias y contribuyentes

Archivo:Simplex description.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Simplex_description.png *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: Czupirek, Kocur, Maksim, Martynas Patasius, 1 ediciones anónimas

Archivo:Ej2.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Ej2.png *Licencia*: Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes*: User:Luisunam01

Archivo:Ej3.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Ej3.png *Licencia*: Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes*: User:Luisunam01

Archivo:Sol. óptima.jpg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Sol._óptima.jpg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes*: User:Shakoran

Archivo:dege.jpg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Dege.jpg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes*: User:Kat1308

Archivo:2tabla.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:2tabla.png *Licencia*: Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes*: User:Rubenskazul

Archivo:Optimalidad.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Optimalidad.png *Licencia*: Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes*: User:Rubenskazul

Archivo:3tabla.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:3tabla.png *Licencia*: Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes*: User:Rubenskazul

Archivo:Modelo ampliado.jpg *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Modelo_ampliado.jpg *Licencia*: Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes*: User:Shakoran

Licencia

Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported
//creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/